Varianta 2

Subiectul I.

a) $a = -1$ şi $b = 2$

b) Fie $M(6, -4)$

c) Aria triunghiului OAB este $S_{OAB} = 4$.

d) cos 3 < 0.

e) $tg\left(D\hat{B}D'\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

f) $\begin{vmatrix} x_C & y_C & z_C & 1 \\ x_D & y_D & z_D & 1 \\ x_E & y_E & z_E & 1 \\ x_F & y_F & z_F & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, deci punctele C, D, E, F sunt necoplanare.

Subiectul II.

1.

a) A are 11 elemente.

b) A are 165 submulțimi cu trei elemente.

c) Probabilitatea cerută este $\frac{1}{11}$.

d) $0 + 3 + 6 + .. + 10 = 165$.

e) Numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimii A care nu îl conțin pe 0 este 45

2.

a) $f'(x) = \frac{x^2}{1 + x^2}$.

b) $f'(x) > 0$, $\forall\, x > 0$, deci funcția f este strict crescătoare pe $(0, \infty)$.

c) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{4}{5}$.

d) $f''(x) > 0$, $\forall\, x > 0$, deci funcția f este convexă pe $(0, \infty)$.

e) $\int_{1}^{\sqrt{3}} f'(x)dx = \sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{12}$.

Subiectul III.

a) Pentru $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, $i \neq j$, la numărătorul funcției w_i apare factorul $X - a_j$, aşadar $w_i(a_j) = 0$.

b) $w_1(a_1) = \frac{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)...(a_1 - a_n)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)...(a_1 - a_n)} = 1$ şi analog, $w_1(a_1) = w_2(a_2) = ... = w_n(a_n) = 1$.

c) Evident.
d) Se ştie că gradul sumei mai multor polinoame este mai mic sau egal decât cel mai mare dintre gradele polinoamelor componente.

Pentru orice $k \in \{1, 2, ..., n\}$, avem: $L_n(a_k) \overset{\text{a), b)}}{=} b_k$.

e) Considerăm polinomul $g \in \mathbf{R}[X]$, $g = f - L_n$ şi folosind **d)** deducem că g este polinomul nul.

f) Considerăm $f \in \mathbf{R}[X]$, $f = 17X + 11$.

Pentru orice $k \in \{1, 2, ..., n\}$, alegând $b_k = 17a_k + 11$ în polinomul L_n şi folosind punctele **d)** şi **e)**, rezultă concluzia.

g) Considerăm $f \in \mathbf{R}[X]$, $f = X^2$.

Pentru orice $k \in \{1, 2, ..., n\}$, alegând $b_k = a_k^2$ în polinomul L_n, şi folosind **d)** şi **e)** rezultă concluzia.

Subiectul IV.

a) $f(x) = \int_a^b t^x dt = \frac{b^{x+1} - a^{x+1}}{x+1} \Leftrightarrow (x+1) \cdot f(x) = b^{x+1} - a^{x+1}, \ \forall x \in [1, \infty)$.

b) Avem $f'(x) = \frac{b^{x+1}((x+1)\ln b - 1) - a^{x+1}((x+1)\ln a - 1)}{(x+1)^2}, \ \forall x \in [1, \infty)$.

c) $g'(x) = \frac{(x-1)^2}{x \cdot (x+1)^2}$, $\forall x \in [1, \infty)$.

d) $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$.

e) $g'(x) > 0$, $\forall x \in (1, \infty)$, deci g este strict crescătoare pe $[1, \infty)$.
Cum $g(1) = 0$, deducem că $g(x) > g(1) = 0$, $\forall x \in (1, \infty)$.

f) Deoarece $\frac{b}{a} > 1$, rezultă $g\left(\frac{b}{a}\right) > 0$, de unde deducem inegalitatea din enunț.

g) $\frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \ldots + \frac{2}{2n+1} = 2 \cdot \frac{2-1}{2+1} + 2 \cdot \frac{3-2}{3+2} + \ldots + 2 \cdot \frac{(\mathrm{n}+1) - \mathrm{n}}{(\mathrm{n}+1) + \mathrm{n}} \overset{f)}{<} \ln(n+1)$.